第 15 講　不定積分

PART1　不定積分の計算

要点整理と公式

要点 ①　不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数を，関数 $f(x)$ の「　　　　　」という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数，すなわち

$$F'(x)=f(x)$$

が成り立つとき，任意の定数 C に対して

$$\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$$

が成り立ち，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。つまり，関数 $f(x)$ の原始関数は無数にある。

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数は定数 C を用いて

$$F(x)+C$$

で表される。この原始関数をまとめて $f(x)$ の「　　　　　」といい，記号　　　　　で表す。すなわち

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

である。このとき，$f(x)$ を「　　　　　」，x を「　　　　　」，C を「　　　　　」という。また，関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を「 積分する 」という。以下，不定積分を求める際に，C は積分定数を表すこととする。

要点 ②　x^{α} の不定積分

不定積分は，これまで学んできた導関数の公式の逆を利用して求めることができる。

実数 α について

$$\left(x^{\alpha+1}\right)'=$$

が成り立つ。また

$$(\log|x|)'=$$

が成り立つ。よって，次の公式が得られる。

x^{α} の不定積分

$\alpha \neq -1$ のとき　$\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

$\alpha = -1$ のとき　$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

(ex) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = \frac{1}{\quad}x^{\quad} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

$\displaystyle\int \sqrt[3]{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}t^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{\quad}t^{\quad} + C = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}t\sqrt[3]{t} + C$

※ $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx$ は $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ と書くことがある。同様に $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ は $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある。

要点 ③ 不定積分の基本性質

不定積分について，次の公式が成り立つ。

不定積分の基本性質

① $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$　（k は定数）

② $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

③ $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(ex) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x^2}dx$

$\displaystyle= \int \left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle= \int dx - 2\int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x^2}dx$

$= x - 2\qquad\qquad + C$

※ $\displaystyle\int 1dx$ は $\displaystyle\int dx$ と書くことがある。

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2+4x}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2}{x}dx$

Point Pickup

x^α の不定積分

$\alpha \neq -1$ のとき $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$

$\alpha = -1$ のとき $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$

積分定数は C 以外の文字を用いることもある。

不定積分の基本性質

① $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （k は定数）

② $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx-\int g(x)dx$

第15講　PART1 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，C は積分定数とする。

1　$\displaystyle\int\frac{2}{x^3}dx=\boxed{ア}+C$

① $-\dfrac{1}{x^2}$　② $-\dfrac{2}{x^2}$

③ $-\dfrac{1}{2x^2}$　④ $-\dfrac{1}{2x^4}$

2　$\displaystyle\int\sqrt{t}\,dt=\boxed{イ}+C$

① $\dfrac{1}{2}\sqrt{t}$　② $t\sqrt{t}$

③ $\dfrac{3}{2}t\sqrt{t}$　④ $\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}$

3　$\displaystyle\int\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx=\boxed{ウ}+C$

① $x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$　② $\dfrac{2}{3}x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}$

③ $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}$　④ $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-4\sqrt{x}$

4　$\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}dx=\boxed{エ}+C$

① $\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^2}$　② $2\sqrt[3]{x}-\log|x|$

③ $3\sqrt[3]{x}-\log|x|$　④ $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}-\log|x|$

第15講　不定積分
PART1 不定積分の計算

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2+4x}{\sqrt{x}}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2}{x}dx$

[解答]

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}dx=\int x^{-4}dx=-\frac{1}{3}x^{-3}+C=-\frac{1}{3x^3}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=\int t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2+4x}{\sqrt{x}}dx=\int(5x\sqrt{x}+4\sqrt{x})dx=\int\left(5x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=2x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=2x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2}{x}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{x}\right)dx=2x^{\frac{1}{2}}-2\log|x|+C=2\sqrt{x}-2\log|x|+C$

第15講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$$\int \frac{2}{x^3}dx = \int 2x^{-3}dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C \quad \text{[A]}$$

$$= -x^{-2}+C$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{x^2}+C}$$

[A]　x^α の不定積分
α ≠ -1 のとき，
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$$

2

[正解] イ：④

[解説]

$$\int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+C \quad \text{[B]}$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C}$$

[B]　x^α の不定積分
α ≠ -1 のとき，
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$$

3　[正解] ウ：③

[解説]

$$\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

$$=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$ [C]

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$ [D]

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C}$$

[C]　x^{α} の形で表す。

[D]　不定積分の基本性質

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

（k は定数）

② $\int\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

4　[正解] エ：③

[解説]

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x}dx$$

$$=\int\left(x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\int x^{-\frac{2}{3}}dx-\int\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{-\frac{2}{3}+1}-\log|x|+C$$ [E]

$$=3x^{\frac{1}{3}}-\log|x|+C$$

$$=\boldsymbol{3\sqrt[3]{x}-\log|x|+C}$$

[E]　$\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C$